



تست ۱
با توجه به اینکه $n \rightarrow \infty$ معادل $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ است پس از هم ارزی $\tan u \sim u$ عبارت را ساده

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \right)$$

توجه شود که برابر نشدن نرم فشرده فوق ابتدا با یک خاصیت ضرب شکسته نگاریم، عبارت را به صورت حاصل جمع نگاریم و تبدیل کردیم.

$$\Rightarrow A = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n -\ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \stackrel{\text{قانون جمع ریز}}{=} -\frac{1}{n} \int_1^n \ln(x) dx = -\frac{1}{n} (x \ln x - x) \Big|_1^n$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{n} (n \ln n - n - (1 \ln 1 - 1)) = \frac{1}{n} (n - n \ln n) = 1 - \ln n$$

تست ۲
ابتدای سری مک لورن تابع کسری $\frac{1}{1-x}$ ، با طریقی هم درجه بندی $f(x)$ ضرب کنیم.

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \end{cases} \Rightarrow g(x) = (f(x)) \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

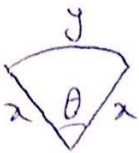
$$\Rightarrow g(x) = a_0 + a_0 x + a_0 x^2 + a_1 x + a_1 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_2 x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow g(x) = a_0 + (a_0 + a_1) x + (a_0 + a_1 + a_2) x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i a_k \right) x^i$$

تست ۲
(۱۴)

اگر زاویه بین دو ضلع را θ بنویسیم، مساحت مقطع ناحیه هدف می‌شود.



$$S = \frac{1}{2} x^2 \theta$$

ماتریس ۲ مفهوم را در متری در مفهم هندسه، $\theta = y$ خواهد بود. پس $\theta = \frac{y}{x}$ زاویه می‌کنیم.

ناحیه هدف : $S = \frac{1}{4} xy$

شکل ۳ : $x + y = 12$ ناحیه هدف

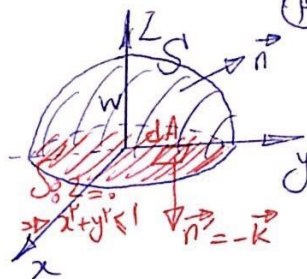
ناحیه هدف می‌شود $\rightarrow S = \frac{x}{4} (12 - x) = 12x - x^2$ $\xrightarrow{\text{ماتریس متری}} \frac{dS}{dx} = 0$ $12 - 2x = 0 \Rightarrow x = 6$

تست ۴
(۱۴)

برای سه شایسته در کتاب، ابتدا سطح را می‌نویسیم و از قاعده در آن استفاده می‌کنیم.

$$I_S = \Phi_{S+S'} - I_{S'}$$

① $\Phi_{S+S'} = \iint_{S+S'} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_W \text{Div}(\vec{F}) dv = \iiint_W (1+0+0) dv = \iiint_W 1 dv = \frac{4}{3}\pi$



② $I_{S'} = \iint_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n}' ds = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x+y, z^2, x^2) \cdot (0, 0, -1) dA$

$$\Rightarrow I_{S'} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} -x^2 dA = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta = -(\pi) \left(\frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I_S = \frac{4}{3}\pi - \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{16\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$$

نکته ۵ اگر $f(x, y, z)$ تابعی از (x, y, z) باشد، $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ در نقطه (x, y, z) بردار گرادیان است. (۳)

نقطه $(2, 1)$ به سمت $(1, 2)$ می‌رود داریم:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (1, 0) \rightarrow \vec{\nabla} f(1, 2) \cdot \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = 2 \Rightarrow f_x(A) = 2 \\ \vec{v}_2 = (0, -1) \rightarrow \vec{\nabla} f(1, 2) \cdot \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = -2 \Rightarrow f_y(A) = 2 \\ \vec{v}_3 = (2, 4) \Rightarrow \vec{\nabla} f(1, 2) \cdot \frac{(2, 4)}{5} = (2, 2) \cdot \frac{(2, 4)}{5} = \frac{7+8}{5} = \frac{15}{5} \end{cases}$$

نکته ۶ ابتدا استرال داخلی را به z می‌سازیم، سپس تصویر ناحیه استرال (داخلی) را می‌کشیم. (۴)

تصویر ناحیه: $\begin{cases} -\sqrt{12-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{12-x^2-y^2} \\ \sqrt{12} \leq x \leq \sqrt{12} \end{cases} \Rightarrow D: x^2 + y^2 \leq 12$

$$I = \iiint_D \frac{1}{r} \frac{2z}{(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_t)^{3/2}} dz dA = \frac{1}{2} \iiint_D \frac{-2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Big|_{-\sqrt{12-x^2-y^2}}^{\sqrt{12-x^2-y^2}} dA$$

$$\Rightarrow I = \iint_D \left(\frac{1}{\sqrt{4+x^2+y^2}} - \frac{1}{4} \right) dA \stackrel{\text{تبدیل قطبی}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{12}} \left(\frac{1}{\sqrt{4+r^2}} - \frac{1}{4} \right) r dr d\theta$$

$$\Rightarrow I = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\sqrt{12}} \left(\frac{r}{\sqrt{4+r^2}} - \frac{1}{4} r \right) dr \right) = 2\pi \left(\sqrt{4+r^2} - \frac{r^2}{8} \right) \Big|_0^{\sqrt{12}}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi \left(\sqrt{16} - \frac{12}{8} - 2 \right) = 2\pi \left(2 - \frac{3}{2} - 2 \right) = 2\pi \left(-\frac{3}{2} \right) = -3\pi$$